УДК 550.83

О выборе нулевого приближения при определении сложного контакта

© Ю. И. Дубовенко, О. А. Черная, 2013

Институт геофизики НАН Украины, Киев, Украина
Поступила 24 июля 2012 г.
Представлено членом редколлегии В. И. Старостенко

Запропоновано аналітичні моделі гравітаційного поля та геологічного середовища для горизонтально-шаруватого середовища з кількома густинними межами поділу шарів у нижньому півпросторі. Перша модель являє собою рівняння сили тяжіння, отримане з розгляду нормального потенціалу сили тяжіння у локальному околі поточної точки вимірювань у двовимірному зображенні. Для моделі середовища, на додаток до відомих у теорії інтерпретації потенціальних полів основних класів контактних поверхонь (Нумерова, Остромогильського і Страхова), введено новий клас контактних поверхонь — клас Чорного. Наведено зразки теорем розділення полів для випадку кількох однозв'язних об'ємів і кількох шарів, що не перетинаються (два найпопулярніші початкові наближення середовища) у досліджуваній моделі. Описано новий чисельний підхід до визначення початкового наближення густинного контакту і його асимптот у багатошаровому геологічному середовищі за допомогою кількох "контактних" алгоритмів.

Two analytical models of gravity field and geological medium have been suggested for the horizontally layered medium with several density interfaces present in the lower semi-space. The first model is acquired from the equation of gravity derived from 2D consideration of normal gravity potential in a local neighborhood of the measurement points. In addition to well-known in the theory of potential fields interpretation the main classes of contact surfaces a new medium model is introduced named a Chorny contact surfaces class. The examples of field separation theorems for a case of several one-coherent volumes and several non-crossed layers (two most popular initial approximations of a medium) are given in the model studied. A new numerical approach for definition of the start approximation of density interface and its asymptotes in the multilayered geological medium by means of several "contact" algorithms is given.

> Основное направление научного прогресса — это создание общих математических моделей в геологии, геофизике и в дальнейшем — создание геолого-математических теорий ...
>
> *Из докл. "Математическое моделирование в петрофизике при комплексной интерпретации данных ГИС, керна и опробования"*
>
> *ПАНГЕЯ*

Введение. В последнее время большое внимание уделяется вопросам переинтерпретации картографического материала, полученного по данным съемок 30-летней давности, ввиду резкого ограничения объемов геологоразведки. Однако вследствие повышенных требований к точности и эффективности интерпретации такая переобработка больших объемов геофизических данных требует новых подходов к численному обоснованию методов, используемых при под-

готовке и обработке соответствующего картографического материала. Вполне логично объединить развитые математические конструкции с современным интерактивным программным обеспечением, дабы комплексно решить проблемы оцифровывания, визуализации и истолкования геофизических данных. Проблема истолкования данных, наиболее важная с точки зрения приложений (впрочем, тесно переплетенная на уровне первичной обработки с первыми двумя), решается в последнее время в русле перестройки аналитической и вычислительной базы теории интерпретации потенциальных полей, обеспечивающей становление новой (третьей) парадигмы в теории и практике интерпретации.

Современные методы обработки геофизических данных развиваются для создания цифровых аналитических моделей поля и геологической среды и высокоточных алгоритмов, ориентированных на применение в пакетах ГИС, особенно при отображении входной информации и результатов ее трансформации с возможностью сопоставления с априорной информацией, также представленной в графическом виде (так называемая визуальная интерпретация, рис. 1).

Собственно, "послойная" обработка представляет новый этап качественной интерпретации, в котором возможности представления информации в виде электронного журнала измерений [Якимчик, 2010] можно использовать для предобработки информации в среде специализированных пакетов общего и специального назначений. Примером такой предобработки могут быть процедуры: выделения регионального фона, например, путем минимизации невязки между набором данных и некоторым полиномом в среде Matlab; предварительная фильтрация измерений в среде Excel; нахождение особых точек поля методом обратной интерполяции полинома Лагранжа в Maple; редукции поля с помощью алгоритмов В. Н. Страхова, реализованные в Python, и т. п. Одним из наиболее удачных примеров цифровой качественной интерпретации можно считать обработку значений поля силы тяжести в связке ПО MapInfo + CorelDraw, предложенный в работе [Якимчик, 2010], что, отнюдь, не исключает их замены в обозримом будущем на open-source аналоги.

Коснемся, однако, иного направления в рамках детерминированного подхода к интерпретации данных потенциальных полей — разработки новых аналитических конструкций геофизического поля и геологической среды. Относительно математических конструкций поля отсылаем заинтересованных читателей к работе [Якимчик, 2009], а среди моделей среды авторам наибо-

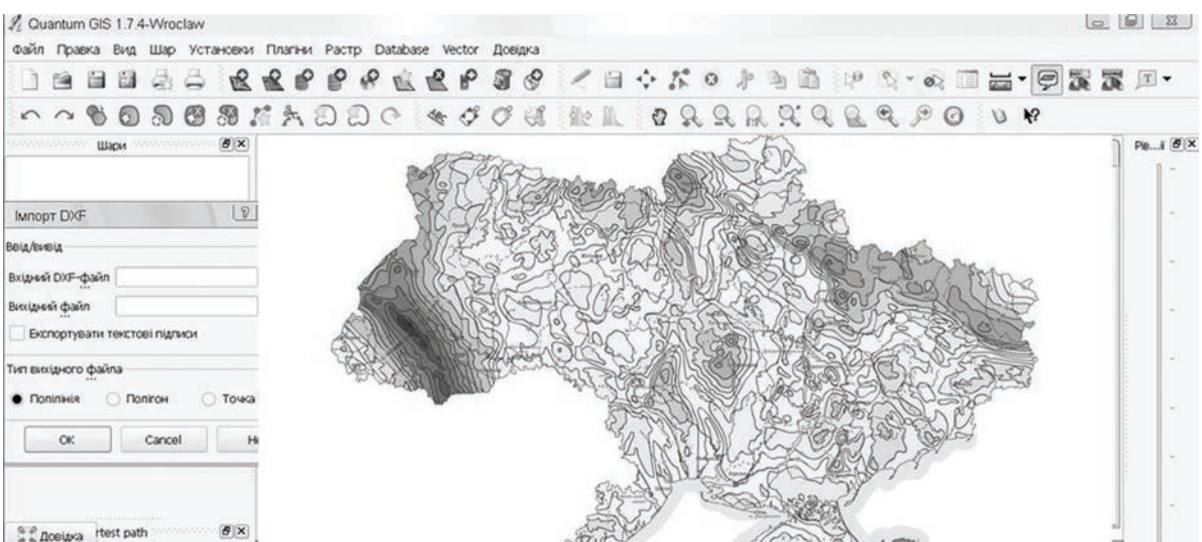


Рис. 1. Карта гравитационных аномалий Украины в среде свободно распространяемой ГИС Quantum GIS.

лее близки плотностные модели типа контакта, одну из которых предлагаем вниманию читателей.

При разработке таковых конструкций ради повышения точности интерпретации данных геофизики обязательно следует учитывать условия адекватности постановок современным требованиям к получению исходных геофизических данных и их обработке. В целом, суть этих требований сводится к таким пунктам:

- высокая точность и технологичность алгоритмов и программ, их переносимость;
- адаптация моделей поля к заданию исходных измерений на коротких профилях;
- адаптация моделей геологической среды к ее сложному (нелинейному неоднородному) состоянию.

Определение контакта в известных моделях среды Страхова, Нумерова, Маловичко [Чорний, Дубовенко, 2002] традиционно замыкается на вычислении разности ундуляций некой теоретической модели среды от некоторого опорного ее элемента, от которого эти ундуляции не слишком сильно отклоняются. Подвох состоит в том, что при этом необходимо заранее знать некоторые элементы геометрии (глубину, форму, ориентацию) данного опорного элемента (модельного тела либо контакта), как начального приближения итераций. От выбора удачного начального приближения зависит, в целом, эффективность любого из существующих итерационных алгоритмов [Старостенко, 1978].

Предлагаем выведенные для горизонтально-слоистой среды с несколькими плотностными границами раздела слоев аналитические модели поля и геологической среды, в которых эти опорные элементы рассчитываются в процессе итераций. Модель поля представляет собой уравнение силы тяжести, полученное из рассмотрения нормального потенциала силы тяжести в локальной окрестности текущей точки измерений в двумерном представлении. Размеры самой локальной окрестности существенно зависят от размеров самой тяготеющей области и точности аппроксимации самой нормальной составляющей потенциала [Дубовенко, 2011].

Основное уравнение поля. Рассмотрим в трехмерном неограниченном евклидовом пространстве $E^{(3)}$ две области G_1 и G_2, вложенные друг в друга так, что расстояние между их границами ∂G_1 и ∂G_2 удовлетворяет неравенству $\operatorname{dist}(\partial G_1, \partial G_2) \geq 0$ при $G_1 \cap G_2 = G_2$. Рассмотрим в области G_2 начало координат и точки области $G^- = G_1 \cup \overline{G}_2$, $\overline{G}_2 = G_2 \cup \partial G_2$, будем обозначать через $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, а точки замкнутой неограниченной области $\overline{G}^+ =$ $= E^{(3)} \setminus G$, $\partial G^+ = \partial G_1$ — через $x = (x_1, x_2, x_3)$; $\left| x - \xi \right| \equiv \gamma\,(x, \xi) = \left(\sum\limits_{i=1}^{3} (x_i - \xi_i)^2 \right)^{1/2}$.

Пусть область $\overline{G}_2$ заполнена массами с плотностью $\delta_2(\xi)$, а область $G_0 = G_1 \setminus \overline{G}_2$ — массами с плотностью $\delta_1(\xi)$ (рис. 2). Обозначим через $\overline{n}\,(x)$ единичную нормаль к поверхности ∂G^+, внешнюю по отношению к G^-. Тогда нормальная составляющая силы тяжести равна

$$u(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial \overline{n}(x)} = f \int\limits_{G^-} \delta(\xi)\, \frac{\partial}{\partial \overline{n}(x)} \cdot \frac{1}{\gamma(x,\xi)}\, d\xi, \tag{1}$$

где $\delta(\xi) = \delta_2(\xi) - \delta_1(\xi)$, $\xi \in \overline{G}_2$, $\delta(\xi) = 0$, $\xi \in \overline{G}_0$, f — гравитационная константа. Вообще говоря, силу тяжести описывает функция

$$u(x) = \left| \operatorname{grad} V(x) \right| = f \int\limits_{G^-} \delta(\xi) \left| \operatorname{grad}_x r^{-1}(x,\xi) \right| d\xi, \tag{2}$$

поскольку значения силы тяжести — это значения модуля градиента потенциала, а не составляющие притяжения, в том числе и (1) [Дубовенко, 2009].

Упростим выражение (1), рассмотрев локальную окрестность Ω точки x при большом ее "увеличении". Тогда с известной долей приближения [Дубовенко, 2011] участок $\partial G = \Omega \cap \partial G^+$ границы ∂G^+ будем считать "неограниченной" плоскостью, т. е. $\partial G = \{x : x_3 = x_3(x_1, x_2) =$ $= \mathrm{const}, (x_1, x_2) \in S_0\}$, где $S_0 = \Omega \cap \partial G^+$. Расположив в этой плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы ось ox_3 была перпендикулярна к плоскости, получим

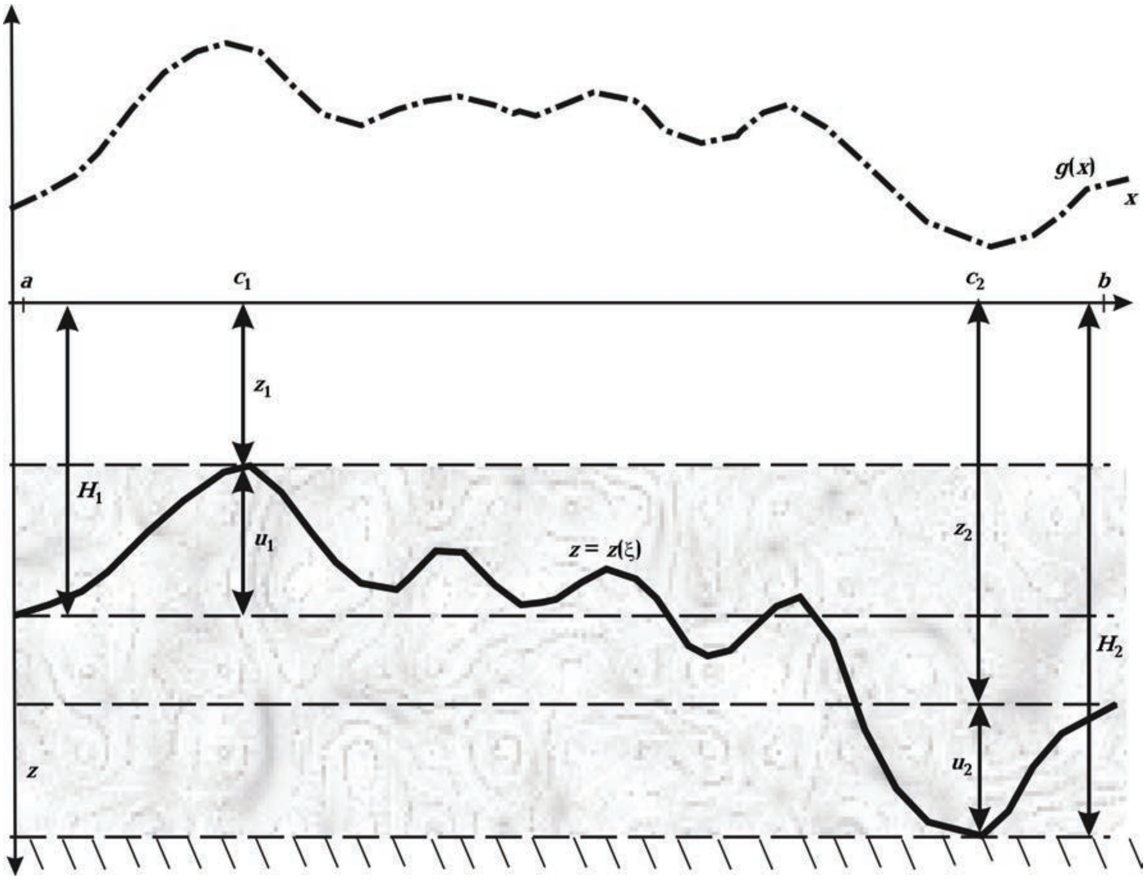


Рис. 2. Модель контактной среды в классе Черного.

$$\bar{n}(x) \equiv \bar{z}, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \Omega^+ = \Omega \cap G^+,$$

$$\Omega^- = \Omega \cap G^-, \quad \partial G = \Omega \cap \partial G^+.$$

Пусть в окрестности Ω^- функции $\delta_1(\xi) = \text{const}$, $\xi \in \bar{G}_2 \subset \Omega^-$, $\delta_2(\xi) = \text{const}$, $\xi \in \Omega^- \cap G_1$, и $\delta = \delta_2 - \delta_1$, а $\bar{G}_2$ — собственное подмножество Ω^-. Фактические размеры области Ω зависят, прежде всего, от размеров изучаемой тяготеющей области $\bar{G}_2$ и точности аппроксимации выражения (1) [Дубовенко, 2011], т. е. в нашем случае

$$\left| f \int\limits_{G^-} \delta(\xi_1) \frac{\partial \gamma^{-1}(x_1, \xi_1)}{\partial \bar{n}(x)} d\xi_1 - f\sigma \int\limits_{G^-} \frac{\partial \gamma^{-1}(x_1, \xi_1)}{\partial x_3} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \right| < \varepsilon. \tag{3}$$

Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то Ω выбрана удачно. Границу $\partial G_2 = \Omega \cap \partial G_2$ выбираем достаточно гладкой:

$$\partial G_2 = \left\{ x : x_i = x_i(x_j, x_k), (x_j, x_k) \in \partial S_i, \ i, j, k = 1,2,3; \bigcup \partial S_i = \partial G_2; x_i \in C^{(1,\alpha)}(\partial S_i) \right\}.$$

При таких допущениях о среде получаем потенциал притяжения

$$u(x_{1,2,3}) \equiv \frac{\partial V(x_{1,2,3})}{\partial x_3} = k \int\limits_{\Omega^-} \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{\sum\limits_{i=1}^{3} (\xi_i - x_i)^2}, \tag{4}$$

где $k = f\sigma$.

Если массы, сосредоточенные в Ω^-, генерируют аномалии $u(x_i)$, вытянутые, положим, вдоль оси ox_2, то их лучше всего измерять по профилям, параллельным $o\xi_1$. Но формула (4) малопригодна для обработки таких измерений. Проинтегрируем выражение (4) по ξ_2, т. е. вычислим интеграл

$$I(u,w)=\int_{\xi_2^{(1)}}^{\xi_2^{(2)}}\frac{wdv}{\left(\tau^2+v^2\right)^{3/2}},$$

где $u=\xi_1-x_1$, $v=\xi_2-x_2$, $w=\xi_3-x_3$, $\tau^2=u^2+w^2$, $d\xi_2=dv$. Делая замену переменной интегрирования $v=\tau\,\mathrm{tg}\varphi$, $dv=\frac{\tau d\varphi}{\cos^2\varphi}$, $\varphi=\mathrm{arctg}\frac{v}{\tau}$, $\tau^2+\tau^2\mathrm{tg}^2\varphi=\frac{\tau^2}{\cos^2\varphi}$, получим

$$I(u,w)=w\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\tau d\varphi/\cos^2\varphi}{\left(\tau^2/\cos^2\varphi\right)^{3/2}}=\frac{w}{\tau^2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\cos\varphi\,d\varphi=\frac{w}{\tau^2}\sin\varphi\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}=$$

$$=\frac{w}{u^2+w^2}\left\{\frac{\xi_2^{(2)}-x_2}{\sqrt{u^2+w^2+\left(\xi_2^{(2)}-x_2\right)^2}}-\frac{\xi_2^{(1)}-x_2}{\sqrt{u^2+w^2+\left(\xi_2^{(1)}-x_2\right)^2}}\right\}.$$

Если $\left|\xi_2^{(2)}-\xi_2^{(1)}\right|>>\sqrt{u^2+w^2}$, $u,w\in\Omega^-$, то рассмотрим предел $I(u,w)$ при $\xi_2^{(2)}\to\infty$, $\xi_2^{(1)}\to-\infty$ (что имеет смысл при изучении пространства вблизи поверхности ∂G, причем $\mathrm{dist}(\xi_3,x_3)<<\mathrm{diam}\partial G$). Так как

$$\lim_{v\to\infty}\frac{v}{\sqrt{\tau^2+v^2}}=\lim_{v\to\infty}\frac{v}{\sqrt{1+\tau^2/v^2}}\equiv1,$$

то $I(u,w)=\frac{2w}{u^2+w^2}$ при $\xi_2^{(2)}\to\infty$, $\xi_2^{(1)}\to-\infty$, и, следовательно,

$$u(x_1,x_3)=2k\iint_S\frac{\xi_3-x_3}{(\xi_2-x_1)^2+(\xi_3-x_3)^2}d\xi_1d\xi_3,$$

где S — проекция $\overline{G}_2$ на плоскость ox_1x_3, $k=f\sigma$. Положим $x_3=0$, $\xi_3=\xi_3(\xi_1)$, $a\le\xi_1\le b$, тогда

$$u(x,0)=k\int_a^b d\xi_1\int_{\xi_3^{(1)}}^{\xi_3^{(2)}}\frac{2\xi_3}{(\xi_1-x_1)^2+\xi_3^2}d\xi_3=k\int_a^b\ln\frac{(\xi_1-x_1)^2+\xi_3^{(2)}(\xi_1)}{(\xi_1-x_1)^2+\xi_3^{(1)}(\xi_1)}d\xi_1,\qquad(5)$$

где $\xi_3^{(1)}=\xi_3^{(1)}(\xi_1)$ и $\xi_3^{(2)}=\xi_3^{(2)}(\xi_1)$, $a\le\xi_1\le b$ — кривые, ограничивающие снизу и сверху тяготеющую двумерную область S.

Модели контактных поверхностей. Рассмотрим несколько популярных классов контактных поверхностей, для которых гарантирована единственность решения обратных задач.

Класс А. Х. Остромогильского $\mathrm{Ost}^{(1,\,\alpha)}(a,\,b)$. Доказано [Остромогильский, 1970], что в этом классе однозначно определяются переменная плотность $\delta(\xi_1,\,\xi_3)$ и граница раздела сред $x_3(\xi_1)$ по значениям внешнего поля.

Граница ∂G раздела сред с переменными плотностями задается уравнением

$$x_3(\xi_1)=\begin{cases}-h+\delta x_3(\xi_1),\ \xi\in[a,b],\\ -h, \qquad\qquad \xi_1\notin[a,b],\end{cases} \tag{6}$$

причем $\delta x_3(a)=\delta x_3(b)=0$, $x_3(\xi_1)$ — кусочно-непрерывная функция и

$$|\delta x_3(x_1)|\geq c(x_1-a)^{1+\alpha},\ a\leq x_1\leq a+\delta,\ \alpha>0,$$

$$|\delta x_3(x_1)|\geq c(b-x_1)^{1+\alpha},\ b-\delta\leq x_1\leq b,\ \alpha>0. \tag{7}$$

Подклассы $\mathrm{Ost}^{(1,\,\alpha)}_{(+)}$ и $\mathrm{Ost}^{(1,\,\alpha)}_{(-)}$ класса $\mathrm{Ost}^{(1,\,\alpha)}(a,\,b)$ можно считать моделями антиклиналей и синклиналей соответственно.

Класс В. Н. Страхова $\mathrm{St}^{(1,\,\alpha)}(a,\,b)$ контактов рассмотрен неоднократно [Страхов, 1970; 1974а, 1974б; 1975а, 1975б; 1976]. Граница ∂G раздела сред с различными плотностями задается уравнением

$$x_3(\xi_1)=\begin{cases}-h_1+\delta x_3(\xi_1),\ \xi_1\in[a,b),\\ -h_2, \qquad\qquad \xi_1=b.\end{cases} \tag{8}$$

При этом $\delta x_3(a)=0$, $h_1,h_2>0$, $x_a(\xi_1)\leq 0$ — кусочно-непрерывна и удовлетворяет на концах интервала $[a,\,b]$ условиям

$$|\delta x_3(\xi_1)|\geq a_1(\xi_1-a)^{1+\alpha},\quad a\leq\xi_1\leq a+\delta,\quad \alpha>0,$$

$$|\delta x_3(\xi_1)|\geq b_1(b-\xi_1)^{1+\alpha},\quad b-\delta\leq\xi_1\leq b,\quad \delta>0, \tag{9}$$

принимая на $[a,\,b]$ конечное (счетное) число экстремальных значений, так что множество $\left\{\underset{[a,\,b]}{\mathrm{extr}}\, z(\xi)\right\}$ непусто. Здесь

$$z_S=z(c_1)=\sup\underset{[a,b]}{\mathrm{extr}}\, z(\xi_1),\ -z_S\leq h_1\ z_i=z(c_2)=\inf\underset{[a,b]}{\mathrm{extr}}\, z(\xi_1),\ -z_i\leq h_2, \tag{10}$$

где $c_1,c_2\in[a,\,b]$, а точки c_1,c_2 могут быть либо внутренними точками отрезка $[a,b]$ либо совпадать с его граничными точками. В последнем случае при условии, что $h_1<h_2$, $c_1=a$, $c_2=b$.

Если $(a,\,b)$ — бесконечный промежуток, т. е. $a=-\infty$, $b=+\infty$, уравнение границы (8) и условия (9) принимают вид

$$z=z(\xi)=-h_1+\delta z(\xi),\ \xi\in(-\xi_0,\xi_0),\qquad |z(\xi)-h_1|\leq a_2|\xi|^{-\beta},\ |\xi|\geq\xi_0,$$

$$|z(\xi)-h_2|\leq b_2|\xi|^{-\beta},\ \beta>0, \tag{11}$$

где $h_1,h_2>0$, а $z_S=z(c_0)=\sup\left\{\underset{[-\xi_0,\,\xi_0]}{\mathrm{extr}}\, z(\xi_1)\right\}$, $z_i=z(c_2)=\inf\left\{\underset{[-\xi_0,\,\xi_0]}{\mathrm{extr}}\, z(\xi_1)\right\}$,

при $c_1, c_2 \in [-\xi_0, \xi_0]$, причем для определенности положим $-z_S \le h_1$, $-z_i \le h_2$, $0 < h_1 < h_2$.

Для контактной границы раздела слоев с постоянной плотностью установлена единственность [Чередниченко, 1978 а; 1978 б].

Пусть G^- — горизонтальная полоса, ограниченная сверху и снизу прямыми $z_1 = h_1$, $z = h_2$, $0 < h_1 < h_2 < +\infty$, и пусть G^- разделена на два слоя с плотностями δ_1 и δ_2 бесконечно гладкой кривой ∂G^-, звездной относительно бесконечно-удаленной точки, которая имеет асимптотой прямую $z = h$, $h_1 < h < h_2$, причем

$$\left| z(\xi) - h \right| \le k \left| \xi \right|^{\alpha}, \ \alpha > 0, \ \left| \xi \right| > \xi_0, \ z(\xi) \in \partial G. \qquad (12)$$

Тогда, если значение h и величина скачка плотности $\Delta\delta = \delta_2 - \delta_1$ известны, то граница ∂G раздела слоев по внешнему полю восстанавливается однозначно.

Доказано [Страхов, 1974 б], что решение обратной задачи о контактной поверхности класса (12) единственно, если известны скачок плотности $\Delta\delta$ и конечная дуга кривой $z(\xi)$ из (12).

Введем специальное обозначение для класса (12): $\mathrm{Ch}^{(1,\beta)}(-\infty,\infty)$. Класс (11) будем обозначать $\mathrm{St}^{(1,\beta)}(-\infty,\infty)$. Очевидно,

$$\mathrm{Ost}^{(1,\alpha)}(a,b) \subset \mathrm{St}^{(1,\alpha)}(a,b), \quad \mathrm{Ch}^{(1,\beta)}(-\infty,\infty) \subset \mathrm{St}^{(1,\beta)}(-\infty,\infty),$$

$$\mathrm{St}^{(1,\alpha)}(a,b) \subset \mathrm{St}^{(1,\alpha)}(-\infty,\infty). \qquad (13)$$

Проблема разделения полей. В практике гравиразведки наибольшее значение имеют задачи, в которых внешнее поле создают сложные распределения масс, например, n попарно непересекающиеся объемы G_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, или n попарно непересекающиеся границы раздела слоев различной плотности. В задачах со сложными распределениями масс единственность решения обратной задачи верна лишь в довольно узких классах, т. е. при наличии большой априорной информации об источниках. Теоремы единственности обратной задачи гравиразведки для сложных распределений масс основаны на теоремах разделения полей, которые позволяют свести решение обратной задачи по суммарному внешнему полю n объектов (рудных тел, границ раздела слоев) к решению обратной задачи для отдельных объектов по полям от этих объектов.

П р и м е р 1. Пусть внешнее поле создается массами с носителем в виде объединения и конечных попарно непересекающихся односвязных объемов G_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, с границами ∂G_k, не имеющими попарно общих точек. Плотности масс в каждом из объемов G_k предполагаются ограниченными.

Теорема разделения полей. *Если известны внешние относительно друг друга гладкие замкнутые конечные поверхности Σ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, строго внутри каждой из которых Σ_k находится одна и только одна компонента G_k носителя масс, то по заданному суммарному внешнему полю (вне объединения объемов G_k) поля компонент G_k определяются однозначно.*

Из этой теоремы легко получить теоремы для сложных распределений масс, аналогичные теоремам Новикова и Раппопорта — Сретенского (для объемов G_k, звездных относительно заданной точки [Чорна, 2003], либо обладающих средними плотностями).

П р и м е р 2. Пусть в n-слоистой двумерной среде каждый из слоев G_k имеет постоянную плотность δ_k. Границы раздела слоев ∂G_k — бесконечные кривые, имеющие горизонтальные асимптоты $z = h_k^+$ и $z = h_k^-$ ($h_k^+ > 0$, $h_k^- > 0$) слева и справа (рис. 3).

Теорема разделения полей. *Если каждая из границ раздела ∂G_k содержит горизонтальный отрезок ∂G_k ($\xi = \mathrm{const}$, $a_k \le \xi \le b_k$), известны проекция некоторой его части на ось Ох, $\alpha_k \le x \le \beta_k$, и прямые γ_j, разделяющие границы слоев, то по заданному внешнему (при $z < 0$) суммарному полю Δg с точностью до постоянных определимы поля Δg_j отдельных границ.*

Следствие [Гласко, Страхов, 1977]. Если при этом известны положения асимптот $z = h_j^+$ и $z = h_j^-$ и скачки плотностей Δg_j, границы ∂G_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) раздела слоев восстанавливаются по заданному суммарному полю Δg однозначно.

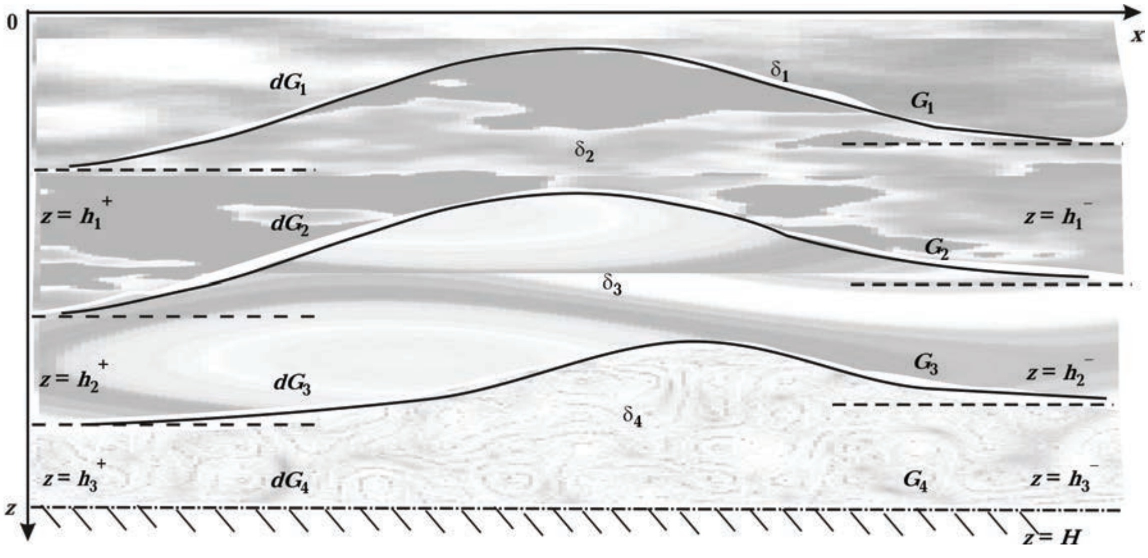


Рис. 3. К разделению полей от нескольких слоистых источников.

Система непересекающихся контактных границ и плотностей $\sigma(\xi)$ восстанавливается единственным образом [Филатов, 1974].

Рассмотрим теперь решения нелинейного интегрального уравнения

$$g(x,z)=\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+z_2(\xi)}{(\xi-x)^2+z_1(\xi)}\,d\xi, \qquad (5')$$

где $z=z_2(\xi)$, $a\le\xi\le b$ — "верхняя", $z=z_1(\xi)$, $a\le\xi\le b$ — "нижняя" границы плоской области G_2. Положим в уравнении (5′) $g(x)=k^{-1}U(x)$, $z_2(\xi)=H=\text{const}$, $z_1(\xi)=z(\xi)$, где $z(\xi)$ принадлежит одному из множеств (например, (13), либо другому) допустимых функций (линеалу), тогда получим нелинейное интегральное уравнение по отношению к искомой функции $z=z(\xi)$:

$$g(x)=\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+z^2(\xi)}\,d\xi. \qquad (14)$$

Его можно рассматривать как функционал на некотором линеале. Найдем его приращение $\Delta g(x,z)=g(x,z+h)-g(x,z)$, где $h(a)=h(b)=0$ принадлежит заданному линеалу. В итоге имеем

$$\Delta g(x,z)=\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+(z+h)^2}\,d\xi-\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+z^2}\,d\xi=\ldots=$$

$$=-\int_a^b \frac{2z(\xi)}{(\xi-x)^2+z^2(\xi)}\,h(\xi)\,d\xi-\int_a^b\left\{\frac{[(\xi-x)^2-z^2(\xi)]}{[(\xi-x)^2+z^2(\xi)]^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}\left[-\frac{3[z(\xi)+\theta(\xi)h(\xi)]}{\{(\xi-x)^2+[z(\xi)+\theta(\xi)h(\xi)]^2\}^2}+\frac{4[z(\xi)+\theta(\xi)h(\xi)]}{\{(\xi-x)^2+[z(\xi)+\theta(\xi)h(\xi)]^2\}^3}\right]h(\xi)\right\}h^2(\xi)\,d\xi.$$

Отсюда

$$-\int_a^b \frac{2z(\xi)}{(\xi-x)^2+z^2(\xi)}h(\xi)\,d\xi=\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+z^2(\xi)}{(\xi-x)^2+[z(\xi)+h(\xi)]^2}\,d\xi+\int_a^b \frac{(\xi-x)^2-z^2(\xi)}{[(\xi-x)^2+z^2(\xi)]^2}h^2(\xi)\,d\xi+$$

$$\frac{2}{3}\int_a^b \frac{[z(\xi)+\theta(\xi)h(\xi)]\{[z(\xi)+\theta(\xi)h(\xi)]^2-3(\xi-x)^2\}}{\{(\xi-x)^2+[z(\xi)+\theta(\xi)h(\xi)]^2\}^3}h^3(\xi)\,d\xi. \qquad (15)$$

Алгоритмы. На основании (14)—(15) можно построить несколько способов восстановления контакта $z=z(\xi)$, $a\le\xi\le b$, по заданному полю $g(x)$, $c\le x\le d$, $[a,b]\subset[c,d]$, $\text{mes}[a,b]<\text{mes}[c,d]$.

1. ***Способ Ньютона.*** Считая известными a, b, H, разложим в ряд (14) относительно $z(\xi)$, ограничиваясь первым членом. Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial z}\ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+z^2}=-\frac{(\xi-x)^2+z^2}{(\xi-x)^2+H^2}\cdot\frac{(\xi-x)^2+H^2}{[(\xi-x)^2+z^2]^2}\cdot 2z=-\frac{2z}{(\xi-x)^2+z^2},$$

находим

$$g(x)=\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+z^2(\xi)}\,d\xi-\int_a^b \frac{2z(\xi)}{(\xi-x)^2+z^2(\xi)}\Delta z(\xi)\,d\xi.$$

Отсюда, полагая $\Delta z(\xi)=z_{n+1}(\xi)-z_n(\xi)$, имеем

$$\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)}z_{n+1}(\xi)\,d\xi=\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)}\,d\xi-g(x)+.$$

$$+\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)}\Delta z_n(\xi)\,d\xi. \qquad (16)$$

2. ***Способ "контакт 1".*** Равенство (15) запишем с точностью до $h^2(\xi)$, т. е.

$$-\int_a^b \frac{2z(\xi)}{(\xi-x)^2+z^2(\xi)}h(\xi)\,d\xi=\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+z^2(\xi)}{(\xi-x)^2+[z(\xi)+h(\xi)]^2}\,d\xi+$$

$$+\int_a^b \frac{(\xi-x)^2-[z(\xi)+\theta(\xi)h(\xi)]^2}{\{(\xi-x)^2+[z(\xi)+\theta(\xi)h(\xi)]^2\}^2}h^2(\xi)\,d\xi.$$

Сложим полученное тождество с (14), перенеся предварительно в (14) $g(x)$ в правую часть:

$$-\int_a^b \frac{2z(\xi)}{(\xi-x)^2+z^2(\xi)}h(\xi)\,d\xi=\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+z^2(\xi)}{(\xi-x)^2+[z(\xi)+h(\xi)]^2}\,d\xi+$$

$$+\int_a^b \frac{(\xi-x)^2-[z(\xi)+\theta(\xi)h(\xi)]^2}{\{(\xi-x)^2+[z(\xi)+\theta(\xi)h(\xi)]^2\}^2}h^2(\xi)\,d\xi-g(x)+\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+z^2(\xi)}\,d\xi.$$

Тогда, объединяя первый и последний интегралы, стоящие справа, получим

$$-\int_a^b \frac{2z(\xi)}{(\xi-x)^2+z^2(\xi)}h(\xi)\,d\xi=\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+[z(\xi)+h(\xi)]^2}\,d\xi-$$

$$-g(x)+\int_a^b \frac{(\xi-x)^2-[z(\xi)+\theta(\xi)h(\xi)]^2}{\{(\xi-x)^2+[z(\xi)+\theta(\xi)h(\xi)]^2\}^2}h^2(\xi)\,d\xi.$$

В этом равенстве, как и раньше, $-1\le\theta(x)\le1$. В итоге с точностью до $h^2(\xi)$ находим

$$-\int_a^b \frac{2z(\xi)}{(\xi-x)^2+z^2(\xi)}h(\xi)\,d\xi=\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+[z(\xi)+h(\xi)]^2}\,d\xi-g(x). \qquad (17)$$

Полагая $z_{n+1}(\xi)=z_n(\xi)+h_n(\xi)$, $n=0,1,2,\ldots$, и $h_0(\xi)=0$, приходим к уравнению

$$-\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)}h_{n+1}(\xi)\,d\xi=\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+z_{n+1}^2(\xi)}\,d\xi-g(x). \qquad (18)$$

Оно разрешимо при известном $z_0(\xi): z_1(\xi)=z_0(\xi)+h_0(\xi)$. Так как $h_{n+1}(\xi)=z_{n+2}(\xi)-z_{n+1}(\xi)$, то

$$-\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)}z_{n+2}(\xi)\,d\xi=\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+z_{n+1}^2(\xi)}\,d\xi-g(x)-$$

$$-\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)}z_{n+1}(\xi)\,d\xi, \qquad (18')$$

откуда очевидно: алгоритмы Ньютона и "контакт 1" формально совпадают только на первом шаге, так как $z_1\equiv z_0$, а на всех последующих шагах они формально различны.

3. ***Способ "контакт 2".*** Сложим величины (14) и (15) и с точностью до $h^3(\xi)$ получим

$$-\int_a^b \frac{2z(\xi)}{(\xi-x)^2+z^2(\xi)}h(\xi)\,d\xi=\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+z^2(\xi)}{(\xi-x)^2+[z(\xi)+h(\xi)]^2}\,d\xi+$$

$$+\int_a^b \frac{(\xi-x)^2-z^2(\xi)}{[(\xi-x)^2+z^2(\xi)]^2}h^2(\xi)\,d\xi+\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+z^2(\xi)}\,d\xi-g(x).$$

Отсюда, объединяя первый и последний интегралы в правой части, а также полагая

$$z_{n+1}(\xi)=z_n(\xi)+h_n(\xi),\quad n=0,1,2,\ldots,\quad \text{и}\quad h_0(\xi)=0,\quad a\le\xi\le b,$$

приходим к уравнению

$$-\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)} h_{n+1}(\xi)\,d\xi =$$

$$=\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+z_{n+1}^2(\xi)}\,d\xi - g(x) + \int_a^b \frac{(\xi-x)^2-z_n^2(\xi)}{[(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)]^2} h_n^2(\xi)\,d\xi. \quad (19)$$

Это уравнение, как и (18), можно решать итеративно, если задано $z_0(\xi)$: $z_1(\xi)=z_0(\xi)+h_0(\xi)$.

Уравнение (19) также можно дать в виде, аналогичном (18′). Полагая $h_n(\xi)=z_{n+1}(\xi)-z_n(\xi)$, получаем

$$-\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)} z_{n+2}(\xi)\,d\xi = \int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+z_{n+1}^2(\xi)}\,d\xi - g(x) -$$

$$-\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)} z_{n+1}(\xi)\,d\xi + \int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2-z_n^2(\xi)}{[(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)]^2}[z_{n+1}(\xi)-z_n(\xi)]^2\,d\xi. \quad (19')$$

А что, если определять не только контакт $z=z(\xi)$, $a\le\xi\le b$, но и "асимптоту" $H=\text{const}$?

4. ***Способ Ньютона.*** Примем во внимание, что

$$\frac{\partial}{\partial z}\ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+z^2} = -\frac{2z}{(\xi-x)^2+z^2}; \qquad \frac{\partial}{\partial H}\ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+z^2} = \frac{2H}{(\xi-x)^2+H^2},$$

и запишем

$$g(x) = \int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+z^2(\xi)}\,d\xi - \int_a^b \frac{2z(\xi)}{(\xi-x)^2+z^2(\xi)}\Delta z(\xi)\,d\xi + \int_a^b \frac{2H}{(\xi-x)^2+H^2}\Delta H\,d\xi.$$

Отсюда, полагая $z_{n+1}(\xi)=z_n(\xi)+\Delta z_n(\xi)$, $H_{n+1}=H_n+\Delta H_n$, $n=0,1,2,\dots$, и $\Delta z_0(\xi)\equiv 0$, $\Delta H_0\equiv 0$, $a\le\xi\le b$, и задавая H_0 и $z_0(\xi)$, получаем

$$\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)}\Delta z_n(\xi)\,d\xi - \int_a^b \frac{2H_n}{(\xi-x)^2+H_n^2}\Delta H_n\,d\xi = \int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+H_n^2}{(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)}\,d\xi - g(x). \quad (20)$$

Это же уравнение в другой форме (непосредственно в "приближениях") примет вид

$$\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)} z_{n+1}(\xi)\,d\xi - \int_a^b \frac{2H_n}{(\xi-x)^2+H_n^2} H_{n+1}\,d\xi = \int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+H_n^2}{(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)}\,d\xi -$$

$$-g(x) + \int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2+z_n^2(\xi)} z_n(\xi)\,d\xi - \int_a^b \frac{2H_n}{(\xi-x)^2+H_n^2} H_n\,d\xi, \quad n=0,1,2,\dots, \quad (20')$$

5. ***Способ "контакт 1".*** В отличие от п. 2, здесь помимо определения $z_n(\xi)$, $a \le \xi \le b$, будем находить и H_n, $a \le \xi \le b$. Для этого рассмотрим функционал

$$g(x, z, H) = \int_a^b \ln \frac{(\xi - x)^2 + H^2}{(\xi - x)^2 + z^2(\xi)} d\xi$$

и определим на линеале его приращение $\Delta g(x, z, H) = g(x, z + h; H + \tau) - g(x, z, H)$, где $h(a) = h(b) = 0$. После несложных преобразований в итоге получим

$$-\int_a^b \frac{2z(\xi)}{(\xi - x)^2 + z^2(\xi)} h(\xi)\, d\xi + \int_a^b \frac{2H}{(\xi - x)^2 + H^2} \tau d\xi =$$

$$= \int_a^b \left\{ \ln \frac{(\xi - x)^2 + (H + \tau)^2}{(\xi - x)^2 + H^2} - \ln \frac{(\xi - x)^2 + (z + h)^2}{(\xi - x)^2 + z^2} \right\} d\xi -$$

$$-\int_a^b \frac{(\xi - x)^2 - H^2}{[(\xi - x)^2 + H^2]^2} \tau^2 d\xi + \frac{2}{3} \int_a^b \frac{(H + \theta\tau)[3(\xi - x)^2 - (H + \theta\tau)^2]}{[3(\xi - x)^2 + (H + \theta\tau)^2]^3} \tau^3 d\xi +$$

$$+\int_a^b \frac{(\xi - x)^2 - z^2(\xi)}{[(\xi - x)^2 + z^2(\xi)]^2} h^2(\xi)\, d\xi - \frac{2}{3} \int_a^b \frac{(z + \theta h)[3(\xi - x)^2 - (z + \theta h)^2]}{[(\xi - x)^2 + (z + \theta h)^2]^3} h^3(\xi)\, d\xi. \quad (21)$$

Сложим полученное тождество с точностью до $h^2(\xi)$ с равенством (14), перенесем $g(x)$ в правую часть полученного соотношения и сведем логарифмы:

$$-\int_a^b \frac{2z(\xi)}{(\xi - x)^2 + z^2(\xi)} h(\xi)\, d\xi + \int_a^b \frac{2H}{(\xi - x)^2 + H^2} \tau d\xi =$$

$$= \int_a^b \left\{ \ln \frac{(\xi - x)^2 + (H + \tau)^2}{(\xi - x)^2 + H^2} - \ln \frac{(\xi - x)^2 + (z + h)^2}{(\xi - x)^2 + z^2} \right\} d\xi + \int_a^b \ln \frac{(\xi - x)^2 + H^2}{(\xi - x)^2 + z^2(\xi)} d\xi - g(x),$$

откуда

$$-\int_a^b \frac{2z(\xi)}{(\xi - x)^2 + z^2(\xi)} h(\xi)\, d\xi + \int_a^b \frac{2H}{(\xi - x)^2 + H^2} \tau d\xi = \int_a^b \ln \frac{(\xi - x)^2 + (H + \tau)^2}{(\xi - x)^2 + (z(\xi) + h(\xi))^2} d\xi - g(x).$$

Полагая в этом уравнении

$$z_{n+1}(\xi) = z_n(\xi) + h_n(\xi),\ H_{n+1} = H_n + \tau_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots,\ \text{и}\ h_0(\xi) \equiv 0,\ \tau_0 \equiv 0,\ a \le \xi \le b, \quad (22)$$

и задавая H_0, $z_0(\xi)$, $a \le \xi \le b$, получаем

$$-\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi - x)^2 + z_n^2(\xi)} h_{n+1}(\xi) d\xi + \int_a^b \frac{2H_n}{(\xi - x)^2 + H_n^2} \tau_{n+1} d\xi = \int_a^b \ln \frac{(\xi - x)^2 + H_{n+1}^2}{(\xi - x)^2 + z_{n+1}^2(\xi)} d\xi - g(x). \quad (23)$$

Так как $h_{n+1}(\xi) = z_{n+2}(\xi) - z_{n+1}(\xi)$, $\tau_{n+1} = H_{n+2} - H_{n+1}$, то уравнение (23) примет еще такой вид:

$$-\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2 + z_n^2(\xi)} z_{n+2}(\xi)\, d\xi + \int_a^b \frac{2H_n}{(\xi-x)^2 + H_n^2} H_{n+2}\, d\xi = \int_a^b \ln \frac{(\xi-x)^2 + H_{n+1}^2}{(\xi-x)^2 + z_{n+1}^2(\xi)} d\xi - g(x) -$$

$$-\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2 + z_n^2(\xi)} z_{n+1}(\xi)\, d\xi + \int_a^b \frac{2H_n}{(\xi-x)^2 + H_n^2} H_{n+1}\, d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (23')$$

6. ***Способ "контакт 2".*** Сложим величины (14) и (21) с точностью до $h^3(\xi)$ и получим

$$-\int_a^b \frac{2z(\xi)}{(\xi-x)^2 + z^2(\xi)} h(\xi)\, d\xi + \int_a^b \frac{2H}{(\xi-x)^2 + H^2} \tau d\xi = \int_a^b \ln \frac{(\xi-x)^2 + (H+\tau)^2}{(\xi-x)^2 + (z+h)^2} d\xi - g(x) -$$

$$-\int_a^b \frac{(\xi-x)^2 - H^2}{[(\xi-x)^2 + H^2]^2} \tau^2 d\xi + \int_a^b \frac{(\xi-x)^2 - z^2(\xi)}{[(\xi-x)^2 + z^2(\xi)]^2} h^2(\xi)\, d\xi.$$

Отсюда, полагая (22) и задавая $H_1 = H_0$, $z_1 = z_0(\xi)$, $a \le \xi \le b$, будем иметь

$$-\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2 + z_n^2(\xi)} h_{n+1}(\xi)\, d\xi + \int_a^b \frac{2H_n}{(\xi-x)^2 + H_n^2} \tau_{n+1}\, d\xi = \int_a^b \ln \frac{(\xi-x)^2 + H_{n+1}^2}{(\xi-x)^2 + z_{n+1}^2(\xi)} d\xi - g(x) -$$

$$-\int_a^b \frac{(\xi-x)^2 - H_n^2}{[(\xi-x)^2 + H_n^2]^2} \tau_n^2 d\xi + \int_a^b \frac{(\xi-x)^2 - z_n^2(\xi)}{[(\xi-x)^2 + z_n^2(\xi)]^2} h^2(\xi)\, d\xi. \qquad (24)$$

Подставляя $h_{n+1}(\xi) = z_{n+2}(\xi) - z_{n+1}(\xi)$, $\tau_{n+1} = H_{n+2} - H_{n+1}$, получим то же уравнение в "приближениях":

$$-\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2 + z_n^2(\xi)} z_{n+2}(\xi)\, d\xi + \int_a^b \frac{2H_n}{(\xi-x)^2 + H_n^2} H_{n+2}\, d\xi = \int_a^b \ln \frac{(\xi-x)^2 + H_{n+1}^2}{(\xi-x)^2 + z_{n+1}^2(\xi)} d\xi -$$

$$- g(x) - \int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2 + z_n^2(\xi)} z_{n+1}(\xi)\, d\xi + \int_a^b \frac{2H_n}{(\xi-x)^2 + H_n^2} H_{n+1}\, d\xi - \qquad (24')$$

$$-\int_a^b \frac{(\xi-x)^2 + H_n^2}{((\xi-x)^2 + H_n^2)^2} (H_{n+1} - H_n)^2\, d\xi + \int_a^b \frac{(\xi-x)^2 - z_n^2(\xi)}{[(\xi-x)^2 + z_n^2(\xi)]^2} [z_{n+1}(\xi) - z_n(\xi)]^2\, d\xi,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Выбор нулевого приближения. Пусть кривая $g(x)$, $c \le x \le d$ имеет на $[c, d]$ несколько экстремумов в точках $c_i \in [c, d]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как $\delta > 0$, то каждому экстремуму отвечает одноименный экстремум $z = z(\xi)$, $a \le \xi \le b$. Определим во множестве $\{\underset{[c,d]}{extr}\, g(x)\}$ наибольший и наименьший экстремумы (наибольший максимум z_S и наименьший минимум z_i), т. е.

$$g_S = g(c_i) = \sup_{[c,d]}\{ extr\, g(x)\}, \quad g_i = g(c_j) = \inf_{[c,d]}\{ extr\, g(x)\}.$$

Обозначим через $z_S = z(c_i) = \sup_{[c,d]}\{ extr\, z(\xi)\}$, $z_i = z(c_j) = \inf_{[c,d]}\{ extr\, z(\xi)\}$ соответствующие экстремумы z. Здесь абсциссы g_S и z_S (и g_i и z_i) совпадают, что не всегда имеет место, но в данном случае верно. Нулевое приближение контакта можно задавать, по меньшей мере, двумя способами (Oz направлена вверх):

$$z_0 = z_0(\xi) = -H_0 + \Delta g(\xi, H_0), \quad a \le \xi \le b, \tag{25}$$

$$z_0 = z_0(\xi) = -H_0 + k_0 \Delta g(\xi), \quad a \le \xi \le b, \tag{26}$$

где $H_0 > 0$ — задаваемая константа — "асимптота" функции z_0 на левом конце промежутка $[a, b]$; $\Delta g(\xi) = g(\xi) - g(a)$; $\Delta g(\xi, H_0)$ — аналитически продолженное значение $\Delta g(\xi)$ на уровне $-H_0$; $k_0 = k(H_0)$ — подлежащий определению коэффициент.

Рассмотрим, прежде всего, способы определения k_0.

1. Пусть в точке $c \in [a, b]$ располагается z_S или z_i. Очевидно,

$$g(c) = \int_a^b \ln \frac{(\xi - c)^2 + H^2}{(\xi - c)^2 + z^2(\xi)} d\xi = \int_{a_1}^{b_1} \ln \frac{u^2 + H^2}{u^2 + z^2(u + c)} du,$$

где $u = \xi - c$, $du = d\xi$, $a_1 = a - c$, $b_1 = b - c$. Возьмем $z_S \ge z(\xi)$, $(z_i \le z(\xi))$, $a \le \xi \le b$. Тогда

$$\ln[(\xi - c)^2 + z^2(\xi)] \le \ln[(\xi - c)^2 + z_S^2], \ \ln[(\xi - c)^2 + z^2(\xi)] \ge \ln[(\xi - c)^2 + z_i^2]. \tag{27}$$

Отсюда следует

$$g_S \ge \int_{a_1}^{b_1} \ln \frac{u^2 + H^2}{u^2 + z_S^2} du, \quad g_i \le \int_{a_1}^{b_1} \ln \frac{u^2 + H^2}{u^2 + z_i^2} du. \tag{28}$$

Оценим интеграл $\int_{a_1}^{b_1} \ln \frac{u^2 + H^2}{u^2 + z^2} du$, полагая, что $a = 0$, $b = 1$, $a_1 = -c$, $b_1 = 1 - c$. После ряда преобразований окончательно находим

$$\int_{a_1}^{b_1} \ln \frac{u^2 + H^2}{u^2 + z^2} du = (1 - c) \ln \frac{(1 - c)^2 + H^2}{(1 - c)^2 + z^2} + c \ln \frac{c^2 + H^2}{c^2 + z^2} +$$

$$+ 2H \operatorname{arctg} \frac{H}{H^2 - c(1 - c)} - 2z \operatorname{arctg} \frac{z}{z^2 - c(1 - c)}.$$

Поэтому

$$g_S \ge (1 - c_i) \ln \frac{(1 - c_i)^2 + H^2}{(1 - c_i)^2 + z_S^2} + c_i \ln \frac{c_i^2 + H^2}{c_i^2 + z_S^2} +$$

$$+2H\operatorname{arctg}\frac{H}{H^2-c_i(1-c_i)}-2z_S\operatorname{arctg}\frac{z_S}{z_S^2-c_i(1-c_i)}, \tag{29}$$

$$g_i\le(1-c_j)\ln\frac{(1-c_j)^2+H^2}{(1-c_j)^2+z_i^2}+c_j\ln\frac{c_j^2+H^2}{c_j^2+z_i^2}+$$

$$+2H\operatorname{arctg}\frac{H}{H^2-c_j(1-c_j)}-2z_i\operatorname{arctg}\frac{z_i}{z_i^2-c_j(1-c_j)}. \tag{30}$$

Полученные неравенства являются исходными для определения z_S и z_i при заданных H, g_S и g_i. Отыскание значений z_S и z_i однотипно, поэтому в дальнейшем индексы опускаются.

Составим функцию

$$f(z)=(1-c)\ln[(1-c)^2+z^2]+c\ln(c^2+z^2)+2z\operatorname{arctg}\frac{z}{z^2-c(1-c)}-$$

$$-(1-c)\ln[(1-c)^2+H^2]-c\ln(c^2+H^2)-2H\operatorname{arctg}\frac{H}{H^2-c(1-c)}+g. \tag{31}$$

Вычислим первую производную

$$f'(z)=(1-c)\frac{2z}{(1-c)^2+z^2}+c\frac{2z}{c^2+z^2}+2\operatorname{arctg}\frac{z}{z^2-c(1-c)}+$$

$$+\frac{2z}{1+\left(\dfrac{z}{z^2-c(1-c)}\right)^2}\cdot\frac{z^2-c(1-c)-2z^2}{(z^2-c(1-c))^2}=$$

$$=(1-c)\frac{2z}{(1-c)^2+z^2}+c\frac{2z}{c^2+z^2}+2\operatorname{arctg}\frac{z}{z^2-c(1-c)}-\frac{2z[z^2+c(1-c)]}{(z^2-c(1-c))^2+z^2}. \tag{32}$$

Для вычисления $f''(z)$ производную $f'(z)$ лучше представить в виде

$$f'(z)=2(1-c)\frac{z}{(1-c)^2+z^2}+2c\frac{z}{c^2+z^2}+2\operatorname{arctg}\frac{1-c}{z}+2\operatorname{arctg}\frac{c}{z}-$$

$$-\frac{2z^3}{(z^2-c(1-c))^2+z^2}-\frac{2c(1-c)z}{(z^2-c(1-c))^2+z^2}, \tag{32$'$}$$

поскольку $\operatorname{arctg}\frac{1-c}{z}+\operatorname{arctg}\frac{c}{z}=\operatorname{arctg}\frac{z}{z^2-c(1-c)}$. Дифференцируя второй раз (32′) по z, получаем

$$f''(z)=-\frac{4(1-c)z^2}{((1-c)^2+z^2)^2}-\frac{4cz^2}{(c^2+z^2)}-\frac{2(3z^2+c(1-c))}{(z^2-c(1-c))^2+z^2}+$$

$$+\frac{4z^2(2z^2-2c(1-c)+1)(z^2+c(1-c))}{([z^2-c(1-c)]^2+z^2)^2}. \tag{33}$$

Приближения z_n какого-либо из значений z_S и z_i определяем по схеме Чебышева [Березин, Жидков, 1960]:

$$z_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}-\frac{f''(z_n)f^2(z_n)}{2f'^3(z_n)}. \tag{34}$$

Последовательные приближения корня $z^{(0)}$ уравнения $f(z)=0$ можно получить значительно проще, чем сделано П. Л. Чебышевым. А именно, если корень $z^{(0)}$ располагается в достаточно узком интервале $[\alpha,\beta]$, то, если z_n выбрано с того же интервала, с точностью до малых 3-го порядка относительно $z^{(0)}-z_n$; $z^{(0)}, z_n\in[\alpha,\beta]$ имеем $0=f(z^{(0)})\cong f(z_n)+$ $+f'(z_n)(z^{(0)}-z_n)+\frac{f''(z_n)}{2}(z^{(0)}-z_n)^2$.

Отсюда при $f'(z_n)\neq 0$ (это может быть, ибо только для кратных корней $f(z)=f'(z)=0$) получаем

$$z^{(0)}-z_n=-\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}-\frac{f''(z_n)}{2f'(z_n)}(z^{(0)}-z_n)^2.$$

Учитывая малость разности $(z^{(0)}-z_n)^2$, на основании предыдущего соотношения положим $(z^{(0)}-z_n)^2=\left(-\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}\right)^2$, откуда $z^{(0)}-z_n=-\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}-\frac{f''(z_n)f^2(z_n)}{2(f'(z_n))^3}$, поэтому $z_{n+1}=z_n-$ $-\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}-\frac{f''(z_n)f^2(z_n)}{2(f'(z_n))^3}$, т. е. получим (34). Процесс (34) при удачном выборе z_n быстро сходится (3—4 итерации для получения $z^{(0)}$ с точностью до 10^{-7}, что согласуется с результатами, полученными в работе [Березин, Жидков, 1960]).

Замечание 1. Из уравнений (29) и (30) следует, что $f(z_S)\geq 0$, а $f(z_i)\leq 0$. А при не очень малых $H>0$ имеем строгие неравенства:

$$f(z_S)>0,\quad f(z_i)<0. \tag{35}$$

Поэтому корни z_B, z_H соответствующих уравнений $f(z_B, g_S)=0$, $f(z_H, g_i)=0$ дают приближения z_S и z_i снизу и сверху соответственно, что может сказаться на "качестве" нулевого приближения $z_0=z_0(\xi)$.

Замечание 2. Согласно замечанию 1 z_S и z_i определяются не очень хорошо при больших *H*, особенно, если значения z_S и z_i достаточно большие. Поэтому дополнительно можно определить, если $\delta g=g(b)-g(a)\neq 0$, кроме z_S и z_i, заданной левой H^-, еще и правую "асимптоту" H^+ кривой $z=z(\xi)$. Это делается по описанной схеме, только в выражении $f(z)$ вместо g_S или g_i берется δg для определения H^+.

Вычислив так для каждого заданного значения H_i^-, $i=1,2,\ldots,n$, левой "асимптоты" искомой кривой $z=z(\xi)$, $a\leq\xi\leq b$, определим значения параметров $z_S^{(i)}$, $z_i^{(i)}$, H_i^+, $i=1,2,\ldots,n$:

$$u^{(i)}=z_S^{(i)}-H_i^-,\quad u_{(i)}=z_i^{(i)}-H_i^-,\qquad \Delta H_i=H_i^+-H_i^-,$$

$$\delta g=g(b)-g(a),\quad \delta g_{\max}=g_S-g(a),\quad \delta g_{\min}=g_i-g(a),$$

и найдем

$$k_0^{(i)}=\frac{1}{e}\sum_{i=1}^{e}k_i^{(i)}, \tag{36}$$

где $k_1^{(i)} = \dfrac{|u^{(i)}|}{|\delta g_{\max}|}$, $k_2^{(i)} = \dfrac{|u_{(i)}|}{|\delta g_{\min}|}$, $k_3 = \dfrac{|\Delta H|}{|\delta g|}$.

Рассмотрим схему отыскания нулевого приближения для контактов, описываемых функциями из классов "антиклиналей" $Ost_{(+)}^{(1,2)}(a,b)$ и "синклиналей" $Ost_{(-)}^{(1,2)}(a,b)$. Типичными представителями этих классов являются функции (рис. 4):

а) антиклиналь

$$z(\xi) = -H + a(1-\xi)\xi, \quad 0 \le \xi \le 1, \tag{37}$$

б) синклиналь

$$z(\xi) = -H - a(1-\xi)\xi, \quad 0 \le \xi \le 1. \tag{38}$$

Для отыскания k_0 систему координат удобно выбрать так, чтобы точка экстремума $g(x)$ находилась в начале координат, т. е. $\underset{[c,d]}{extr}\; g(x) = g(0)$, тогда и интервал $[c,d]$ выбирается "симметрично" относительно начала, так же как и $a=-c$, $b=c$. При этом для модели (37) (слева на рис. 4) имеют место соотношения $\alpha_1 = \operatorname{arctg} C/H$, $H\alpha_1 < z\alpha_2$, $\alpha_1 > \alpha_2$, а для модели (38) — соотношения $\alpha_2 = \operatorname{arctg} C/z$, $H\alpha_1 > z\alpha_2$, $\alpha_1 < \alpha_2$.

Функция $f(z) = 2c\ln(c^2+z^2) + 4z\operatorname{arctg}\dfrac{c}{z} - 2c\ln(c^2+H^2) - 4H\operatorname{arctg}\dfrac{c}{H} + g$, где $g = g_S$ — в случае антиклинали, $g = g_i$ — в случае синклинали (оба значения — со своими знаками). Ее производные $f'(z) = 4\operatorname{arctg}\dfrac{c}{z}$; $f''(z) = -\dfrac{4c}{c^2+z^2}$. Так как $f(H) = g$, то в случае синклинали $f(H) < 0$, а в случае антиклинали $f(H) > 0$. В обоих случаях $f''(H) = -\dfrac{4c}{c^2+H^2} < 0$. Поэтому $f(H)f''(H) > 0$ для синклинали и $f(H)f''(H) < 0$ для антиклинали. В обоих случаях для определения z_S и z_i используется процесс (34). Попытки обойтись грубыми приближениями z_S и z_i, вычисленными *не по* (34), вообще говоря, успеха не имели[1], хотя в ряде случаев приводили к хорошим результатам.

Рассмотрим некоторые из попыток. Пусть вначале $g = 2c\ln\dfrac{c^2+H^2}{c^2+z^2} + 4H\operatorname{arctg}\dfrac{c}{H} - 4z\operatorname{arctg}\dfrac{c}{z}$.

Для синклинали (см. рис. 4) $z = H+u$, H, z, $u > 0$, $\alpha_1 \ge \alpha_2$ (знак равенства достигается при $c\to\infty$) и, следовательно, $4H\operatorname{arctg}\dfrac{c}{H} - 4(H+u)\operatorname{arctg}\dfrac{c}{H+u} = 4H\alpha_1 - 4(H+u)\alpha_2 \le 0$. Поэтому

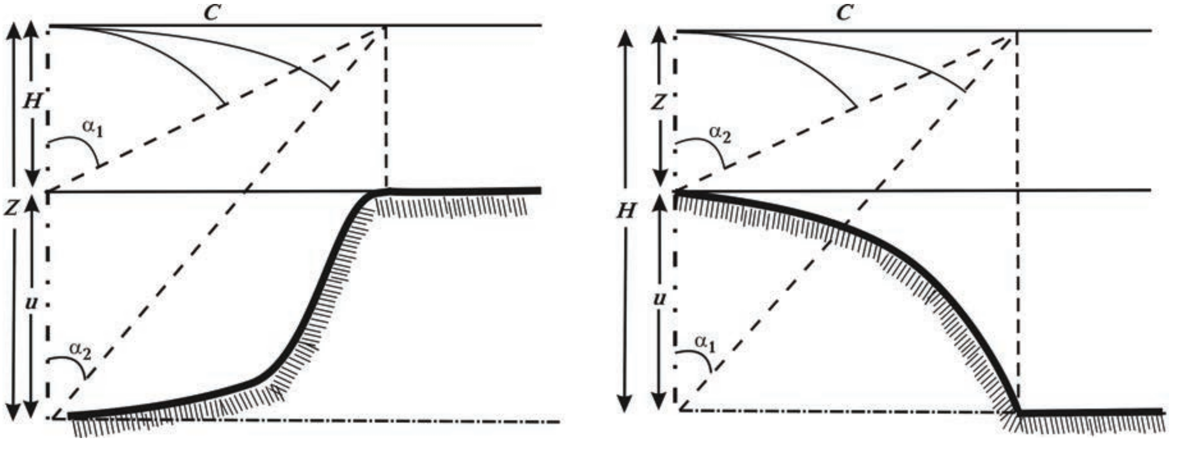


Рис. 4. Модели контактов, описываемых функциями "антиклиналей" и "синклиналей".

[1] Слабая сходимость (до 50 итераций) и низкая точность, численная неустойчивость.

$$\ln\frac{c^2+H^2}{c^2+z^2}\geq\frac{g}{2c},\quad c^2+z^2\leq(c^2+H^2)\,e^{-\frac{g}{2c}},\quad u\leq\sqrt{(c^2+H^2)\,e^{-\frac{g}{2c}}-c^2}-H. \tag{39}$$

Для антиклинали $z=H-u$, H, $u>0$, $\alpha_1\leq\alpha_2$ и, следовательно,

$$4H\operatorname{arctg}\frac{c}{H}-4(H-u)\operatorname{arctg}\frac{c}{z}=4H\alpha_1-4z\alpha_2\geq 0.$$

Поэтому

$$\ln\frac{c^2+H^2}{c^2+z^2}\leq\frac{g}{2c},\quad u\leq H-\sqrt{(c^2+H^2)\,e^{-\frac{g}{2c}}-c^2}\,. \tag{40}$$

При небольших значениях u (по сравнению с H) можно поступать по другому, а именно принять

$$\ln[c^2+(H+u)^2]-\ln(c^2+H^2)\approx\frac{2H}{c^2+H^2}\,u,$$

$$(H+u)\operatorname{arctg}\frac{c}{H+u}-H\operatorname{arctg}\frac{c}{H}\approx\left(\operatorname{arctg}\frac{c}{H}-\frac{cH}{c^2+H^2}\right)u$$

для синклинали. Поэтому $g=-4\operatorname{arctg}\frac{c}{H}\,u$ и, значит,

$$u=|\,g\,|\Big/4\operatorname{arctg}\frac{c}{H}, \tag{41}$$

поскольку для синклинали $g<0$. Для антиклинали, хотя $g>0$, но $z=H-u$. Поэтому формула (41) остается прежней. Заметим, что $f(H)=g$, $f'(H)=4\operatorname{arctg}\frac{c}{H}$ и поэтому (41) является первым приближением в итерациях (34).

Второй способ основан на определении различных моментов кривой $z=z(\xi)$. В простейшем случае, по теореме К. Гаусса $\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\,dx=2\pi m$ (m — возмущающая масса, сосредоточенная в области, ограниченной кривыми $z_1=z(\xi)$, $z_2=-H$, $a\leq\xi\leq b$, ось oz — вверх), поэтому

$$m=\int_a^b\sigma\ z(\xi)\ d\xi+\int_a^b\sigma H d\xi=\int_a^b(z(\xi)+H)\,d\xi,\quad \sigma=1.$$

Отсюда $z_S\geq\frac{m}{b-a}-H$, $z_i\leq\frac{m}{b-a}-H$ или

$$z_S\geq\frac{1}{2\pi(b-a)}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\,dx-H,\quad z_i\geq\frac{1}{2\pi(b-a)}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\,dx-H. \tag{42}$$

В последних формулах полагаем $\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\,dx\approx\int_c^d g(x)\,dx$.

Обратим внимание на вычисление $\int_c^d g(x)\,dx=\int_c^d dx\int_a^b\ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+z^2(\xi)}\,d\xi$. Подставляя

$u=\xi-x,\ du=-dx,\ u_1=\xi-c,\ u_2=\xi-d$, получаем

$$\int_c^d g(x)\,dx=\int_a^b\left\{u\ln\frac{u^2+H^2}{u^2+z^2}+2H\operatorname{arctg}\frac{u}{H}-2z\operatorname{arctg}\frac{u}{z}\right\}_{u_2}^{u_1}d\xi=$$

$$=\int_a^b\left\{(\xi-x)\ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+z^2(\xi)}+2H\operatorname{arctg}\frac{(\xi-x)}{H}-2z(\xi)\operatorname{arctg}\frac{(\xi-x)}{z(\xi)}\right\}_{\xi-d}^{\xi-c}d\xi=$$

$$=\int_a^b\left\{c\ln\frac{c^2+H^2}{c^2+z^2(\xi)}-d\ln\frac{d^2+H^2}{d^2+z^2(\xi)}+2H\operatorname{arctg}\frac{c}{H}-\right.$$

$$\left.-2H\operatorname{arctg}\frac{d}{H}-2z(\xi)\operatorname{arctg}\frac{c}{z(\xi)}+2z(\xi)\operatorname{arctg}\frac{d}{z(\xi)}\right\}d\xi=$$

$$=\int_a^b\left\{d\ln[d^2+z^2(\xi)]-c\ln[c^2+z^2(\xi)]+2z(\xi)\operatorname{arctg}\frac{d}{z(\xi)}-2z(\xi)\operatorname{arctg}\frac{c}{z(\xi)}\right\}d\xi+$$

$$+(b-a)\left\{c\ln(c^2+H^2)-d\ln(d^2+H^2)+2H\operatorname{arctg}\frac{c}{H}-2H\operatorname{arctg}\frac{d}{H}\right\}.$$

О численном решении. По предложенным алгоритмам составлены программы и проведено численное моделирование. Теоретически эти конструкции показывают несколько лучшую сходимость при вычислении способом Ньютона по сравнению с классическими примерами [Гравиразведка ..., 1990], но их практическая эффективность требует проверки на подготовленном материале полевых гравиметрических съемок. Попытки обойтись грубыми приближениями z_S и z_i, вычисленными не по (34), успеха не имели (крайне низкая сходимость была на порядок меньше заявленной [Березин, Жидков, 1960]), хотя иногда приводили к математически корректным результатам. Однако геологическое содержание грубых приближений едва ли достоверно.

Список литературы

Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 2. — Москва: Физматгиз, 1960. — С. 140—143.

Гласко В.Б., Страхов В.Н. Проблема единственности в некоторых обратных задачах геофизики // Проблемы матем. физики и вычисл. математики. — Москва: Наука, 1977. — С. 95—107.

Гравиразведка: Справочник геофизика / Под ред. Е.А. Мудрецовой, К.Е. Веселова. 2-е изд., перер. и доп. — Москва: Недра, 1990. — 607 с.

Дубовенко Ю.І. Задача Алексідзе для відновлення потенціалу сили тяжіння // Геофиз. журн. — 2009. — **31**, № 6. — С. 132—139.

Дубовенко Ю.И. Об определении погрешностей гравиметрических трансформаций // Геофиз. журн. — 2011. — **33**, № 1. — С. 136—146.

Нумеров Б.В. Интерпретация гравитационных наблюдений в случае одной контактной поверхности // Докл. АН СССР. — 1930. — № 21. — С. 569—574.

Остромогильский А.Х. О единственности решения обратной задачи теории потенциала // ЖВМ и МФ. — 1970. — **10**, № 2. — С. 352—361.

Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. — Киев: Наук. думка, 1978. — 228 с.

Страхов В.Н. К теории логарифмического потенциала при переменной плотности возмущающих масс // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1975 а. — № 12. — С. 64—81.

Страхов В.Н. К теории обратной задачи логарифмического потенциала для контактной поверхности // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1974 а. — № 6. — С. 39—60.

Страхов В.Н. Некоторые вопросы плоской задачи гравиметрии // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1970. — № 12. — С. 32—44.

Страхов В.Н. Об интегральных и функциональных уравнениях некоторых обратных задач теории логарифмического потенциала и их значении для интерпретации гравитационных и магнитных аномалий // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1976. — № 3. — С. 54—66.

Страхов В.Н. Об обратной задаче логарифмического потенциала для контактной поверхности // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1974 б. — № 2. — С. 43—65.

Страхов В.Н. Об условиях однозначного определения границ раздела двухмерных слоистых сред по данным гравитационных наблюдений // Докл. АН СССР, сер. Б. — 1975 б. — № 12. — С. 1086—1091.

Филатов В.Г. О единственности решения некоторых обратных задач гравиразведки // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1974. — № 11. — С. 97—101.

Чередниченко В.Г. К вопросу об определении плотности тела по заданному потенциалу // Докл. АН СССР. Сер. Б. — 1978 б. — **240**, № 5. — С. 1032—1035.

Чередниченко В.Г. Обратная задача для потенциала слоистых сред в двумерном случае // Дифференц. уравнения. — 1978 а. — **14**, № 1. — С. 140—147.

Чорна О.А. Про відновлення границі обмеженого зіркового однорідного тіла, близького до круга. Ч. 1, 2 // Геоінформатика. — 2003. — № 1. — С. 64—71; № 2. — С. 57—65.

Чорний А.В., Дубовенко Ю.І. Дослідження оберненої задачі потенціалу для контактної поверхні // Геофиз. журн. — 2002. — **24**, № 3. — С. 77—92.

Якимчик А.И. К вопросу о построении региональных аналитических аппроксимаций элементов аномальных гравитационных полей // Геофиз. журн. — 2009. — **31**, № 1. — С. 121—124.

Якимчик А.И. Технология оцифровки карт фактического материала на основе программного обеспечения MapInfo Professional и CorelDraw // Геофиз. журн. — 2010. — **32**, № 3. — С. 112—124.